

ANALYSE STATIQUE D'UN ÉLÉMENT-CÂBLE

M. EZZIANE ^{1,2}, R. JAUBERTHIE ², L. MOLEZ², D. RANGEARD ², I. MESSAOUDENE^{2,3}.

¹ Laboratoire des matériaux et procédés de construction, Algérie, e-mail : ezzmed44@yahoo.fr

² Laboratoire Génie Civil et Génie Mécanique, INSA – Université Européenne de Bretagne- 35043 Rennes Cedex, France

³ Laboratoire Géo matériaux, Université Mohamed BOUDIAF- 28000 M'SILA, Algérie

RÉSUMÉ

Notre époque est caractérisée par une certaine hostilité de la population vis-à-vis des constructions «dures», c'est-à-dire grandes, volumineuses et lourdes. Pour les rendre acceptables par le public, l'une des voies est de construire des structures légères en réduisant les dimensions des pièces structurales visibles, parmi lesquelles on cite les structures à câbles.

Le câble présente toutes les propriétés d'un élément de haute résistance en traction. Il travaille en traction directe, ce qui veut dire que sa résistance est pleinement utilisée, ce qui n'est pas le cas des éléments soumis à la flexion ou à la compression.

Le besoin de développer et d'améliorer les méthodes de calcul incite les chercheurs, aujourd'hui et plus que jamais, à multiplier sans cesse leurs travaux afin d'atteindre ce but de manière satisfaisante.

L'objectif de ce travail consiste en l'élaboration d'une méthode de résolution qui concrétise de plus en plus la réalité du comportement statique d'un câble soumis à des charges concentrées, en tenant compte des facteurs de non-linéarité géométrique et de déformations élastiques.

MOTS CLÉS : Élément câble, Flèche, Poids propre, Non linéarité, Déplacements nodaux.

1. Introduction

L'analyse d'une structure à câble est conditionnée par le choix de la méthode de calcul. Ces méthodes aboutissent à la solution après avoir introduit certaines hypothèses simplificatrices. Il est donc évident que les hypothèses sur lesquelles se basent les méthodes de calcul doivent concrétiser d'une façon plus proche les conditions réelles du problème.

Parmi ces méthodes, celle que l'on adopte le plus souvent (méthode de calcul de V.K. Katsurine appelée méthode classique) donne la solution en adoptant l'hypothèse suivante: le poids propre du câble est considéré distribué le long de la travée comme charge uniformément répartie quand le rapport entre la flèche du câble et la longueur de la travée ne dépasse pas 10 % (il s'agit du câble à petite flèche), ce qui se traduit par une forme parabolique [1]. Un tel procédé souffre cependant d'une limitation due à la condition de la flèche qui doit être satisfaite ($f/l \leq 10\%$). Autrement dit, son domaine d'application est restreint.

Par ailleurs, la nécessité d'une amélioration des méthodes

de calcul permettant une meilleure compréhension du comportement d'une structure à câble s'avère indispensable. Dans cette optique, nous proposons une approche permettant ainsi de pallier l'inconvénient de la méthode de calcul de V.K. Katsurine. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les hypothèses suivantes :

- non-linéarité géométrique des câbles [2],
- les câbles ne possèdent pas de rigidité à la flexion [3],
- leur rigidité à l'extension ne varie pas avec l'effort [4],
- la loi de Hooke est valable,
- la direction verticale de la charge appliquée reste inchangée au cours de la déformation.

Mais, afin de mieux cerner le comportement réel d'un câble sous l'influence des charges concentrées, deux conditions doivent être ajoutées aux hypothèses précitées, à savoir :

a) Le poids propre du câble est distribué uniformément le long du câble et non le long de la travée comme dans le cas de la méthode classique [3 & 5],

b) Le câble devient discontinu sous l'application des charges concentrées [6 & 7].

La condition (a) a une influence sur la configuration de l'élément-câble. Cette influence est traduite par une forme hyperbolique de l'élément-câble.

La condition (b) a une influence sur la configuration de la structure à câble

2. Equation fondamentale de l'élément-câble

Considérons un élément-câble soumis seulement à son poids propre g_o , suspendu entre deux appuis fixes dont les points de suspension se situent à des niveaux différents, rapportés à un repère orthonormé (x, y) comme indiqué sur la figure 1.

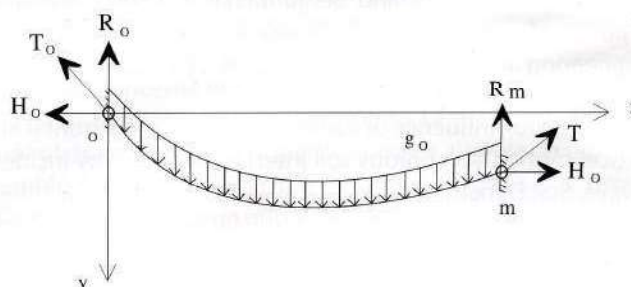


Figure 1 : Élément-câble soumis à son poids propre

En supposant que le câble est idéalement flexible [3], considérons un élément ds infiniment petit, comme indiqué sur la figure 2.

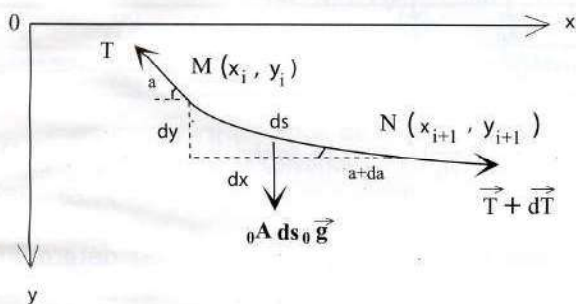


Figure 2 : Equilibre d'un élément infiniment petit de l'élément-câble

L'équilibre de l'élément-câble se traduit par l'équation suivante :

$$dT \cdot \sin \alpha = -q_0 \cdot A \cdot ds_0 \cdot g \quad (1)$$

$$dT \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Les équation (1) et (2) permettent de montrer que l'accroissement de la tension suivant l'axe x est nul.

Sachant que :

$$T = \frac{H_0}{\cos \alpha} \quad (3)$$

En substituant l'équation (3) dans l'équation (2), il vient :

$$dH_0 = 0 \quad (4)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$H_0 = \text{constante} \quad (5)$$

L'équation (5) permet de déduire que la « poussée horizontale » du câble dans n'importe quelle section est constante.

En supposant que la section transversale A est constante le long de l'élément-câble, alors :

$$\text{Argshy}' + \frac{H_0}{EA} y' = -\frac{g_0}{H_0} (x - x_i) + \text{Argshy}'_i + \frac{H_0}{EA} y'_i \quad (6)$$

L'équation (6) caractérise d'une façon exacte la forme de l'élément-câble car, en effet, le poids propre du câble est considéré comme une charge uniformément distribuée le long de l'élément et non le long de la travée, donc la courbe de flèche sera une hyperbole. Par conséquent, l'équation (6) peut-être considérée comme un modèle mathématique de l'élément-câble.

3. Equation fondamentale simplifiée (réduite)

Les termes $\frac{H_0}{EA} y'$ et $\frac{H_0}{EA} y'_i$ sont trop petits par rapport aux autres termes de l'équation (6), donc ils peuvent être négligés en commettant une erreur de l'ordre de 0,001%. En conséquence l'équation (6) devient :

$$\text{Argshy}' = -\frac{g_0}{H_0} (x - x_i) + \text{Argshy}'_i \quad (7)$$

En introduisant la fonction hyperbolique sh (fonction réciproque de Argsh) aux deux membres de l'équation (7), il vient alors :

$$y' = \text{sh} \left[-\frac{g_0}{H_0} (x - x_i) + \text{Argshy}'_i \right] \quad (8)$$

L'équation (8) exprime la relation entre la dérivée y' de déplacement d'une section quelconque et la tension horizontale du câble.

4- Cas d'un élément – câble discontinu

Considérons un élément-câble composé de plusieurs chaînes de câbles, suspendu aux deux points fixes 0 et m (Fig. 3).

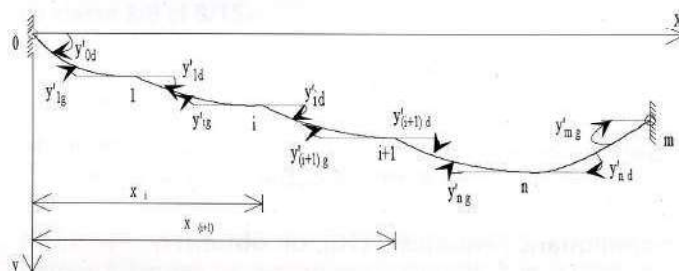


Figure 3 : Elément-câble discontinu

Considérons une chaîne de câble comprise entre les sections (i) et (i+1) et appliquons l'équation (8). L'équation fondamentale sera donc écrite sous la forme :

$$y'_{(i+1)g} = \text{ch} \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) y'_{id} - \text{sh} \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) \sqrt{1 + y'^2_{id}} \quad (9)$$

5. Equation de la flèche de l'élément – câble

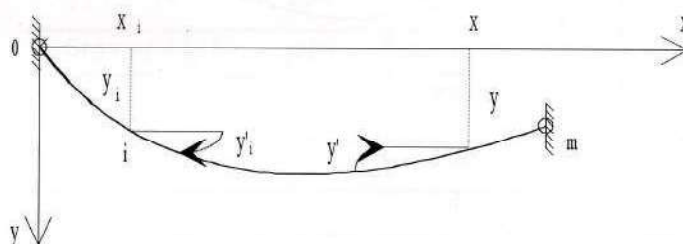


Figure.4 : Schéma de calcul de flèche de l'élément-câble

L'équation de la courbe de flèche est obtenue en faisant l'intégration de l'équation fondamentale réduite (8) entre les bornes $[y, y_i]$ correspondantes aux abscisses $[x, x_i]$ comme indiqué sur la figure 4.

$$y = \frac{H_0}{g_0} \left[\sqrt{1 + y_i'^2} - \sqrt{1 + y'^2} \right] + y_i \quad (10)$$

La relation (10) traduit l'équation de la courbe de flèche qui est fonction de la dérivée de déplacement et de la tension horizontale de l'élément-câble. Considérons un tronçon de l'élément-câble entre deux sections (i) et (i+1), schématisé par la figure 5.

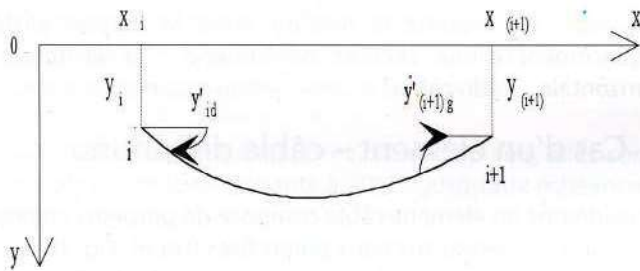


Figure 5 : Schéma de calcul de flèche d'un tronçon de l'élément-câble

En appliquant l'équation. (10), on obtient :

$$y_{(i+1)} = \frac{H_0}{g_0} \left\{ \left[1 - ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) \right] \sqrt{1 + y_{id}'^2} + sh \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) y_{id}' \right\} + y_i \quad (11)$$

6. Longueur de l'élément - câble

Soit un tronçon de l'élément-câble entre deux sections (i) et (i+1), de longueur L_{0i} . Considérons un élément infiniment petit ds (Fig. 6).

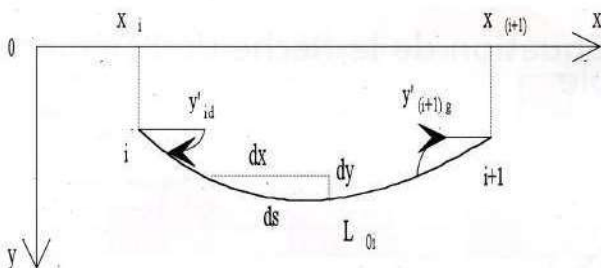


Figure 6. Longueur d'un tronçon de l'élément-câble

La longueur de l'élément-câble est définie par

$$L_{0i} = \int_{x_i}^{x_{(i+1)}} ds = \int_{x_i}^{x_{(i+1)}} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (12)$$

Après intégration de cette équation, il en résulte :

$$L_{0i} = \frac{H_0}{g_0} \left\{ y_{id}' - sh \left[-\frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) + \text{Argsh} y_{id}' \right] \right\} = \frac{H_0}{g_0} (y_{id}' - y'_{(i+1)g}) \quad (13)$$

La longueur totale de l'élément-câble est déterminée comme suit :

$$L_0 = \sum_{i=0}^n L_{0i} \quad (14)$$

Où n représente le nombre de sections (ou noeuds). Comme l'élément-câble, soumis à son poids propre, étant continu dans toutes les sections (voir Fig. 1), alors la longueur totale L_0 peut-être déduite directement de l'équation (13), d'où

$$L_0 = \frac{H_0}{g_0} (y_{0d}' - y'_{mg}) \quad (15)$$

Où y'_{mg} est déterminée à partir de l'équation (9) :

$$y'_{mg} = ch \frac{g_0}{H_0} x_m \cdot y_{0d}' - sh \frac{g_0}{H_0} x_m \cdot \sqrt{1 + y_{0d}'^2} \quad (16)$$

7. Allongement élastique de l'élément câble

L'allongement élastique est donné par :

$$\Delta ds = \frac{T ds}{EA} = \frac{H_0}{\cos \alpha} \cdot \frac{ds}{EA} = \frac{H_0}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{dx}{EA} \quad (17)$$

Intégrons l'expression de Δds entre les bornes $[x_i, x_{(i+1)}]$, il s'ensuit :

$$\Delta L_{0i} = \frac{H_0}{EA} \int_{x_i}^{x_{(i+1)}} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (18)$$

Or, le terme d'intégrale n'est que la longueur de l'élément-câble L_{0i} , d'où il vient :

$$\Delta L_{0i} = \frac{H_0^2}{EA \cdot g_0} (y_{id}' - y'_{(i+1)g}) L_{0i} \quad (19)$$

Où ΔL_{0i} est l'allongement élastique d'un tronçon de l'élément-câble entre deux sections (i) et (i+1). De même, l'allongement élastique total de l'élément-câble est obtenu en faisant la sommation de L_{0i} , compte tenu de la remarque que l'élément-câble sous son poids propre est continu, alors l'expression finale de ΔL_{0i} sera donc :

$$\Delta L_0 = \frac{H_0^2}{EA \cdot g_0} (y_{0d}' - y'_{mg}) \quad (20)$$

8. Longueur initiale de l'élément - câble

La longueur initiale de l'élément-câble est équivalente à la longueur de l'élément-câble sous son poids propre diminuée de tout allongement élastique [7]. Donc, elle est définie comme suit :

$$\bar{L}_0 = L_0 - \Delta L_0 \quad (21)$$

En remplaçant L_0 et ΔL_0 par leurs expressions respectives (13) et (19), il en résulte :

$$\bar{L}_0 = \frac{H_0}{g_0} \left(1 - \frac{H_0}{EA} \right) (y'_{0d} - y'_{mg}) \quad (22)$$

9. Détermination de la tension horizontale H_0 de l'élément -câble

L'expression reliant y'_{id} à H_0 est déduite directement à partir de l'équation de la courbe de flèche (10). Par conséquent :

$$A_i y'^2_{id} - B_i y'_{id} + C_i = 0 \quad (23)$$

Avec :

$$A_i = 2 \left[ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) - 1 \right]$$

$$B_i = 2 \frac{g_0}{H_0} (y_{(i+1)} - y_i) . sh \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i)$$

$$C_i = \left[\frac{g_0}{H_0} (y_{(i+1)} - y_i) \right]^2 - \left[ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) - 1 \right]^2$$

La résolution de l'équation (23) permet de déterminer la dérivée de déplacement dans la section (i) et la tension horizontale de l'élément-câble. Mais cette équation ne peut pas être résolue directement, c'est pourquoi la résolution par une méthode itérative est imposée.

10. Tension dans l'élément - câble

La tension dans une section quelconque (i) de l'élément-câble est donnée par :

$$T_i = H_0 \sqrt{1 + y'^2_i} \quad (24)$$

11. Applications

Pour illustrer la méthode de calcul proposée, le choix des exemples s'est porté sur deux cas de câbles :

- cas de câble à petite flèche ($f/l \leq 10\%$) . Ce cas sera représenté par l'exemple n° 1.
- cas de câble à grande flèche ($f/l > 10\%$) . Ce dernier sera traduit par l'exemple n° 2.

Exemple n° 1 (cas d'appuis fixes)

Soit un câble à une seule travée de portée 100 m , appuyé sur deux appuis fixes, chargé par une force concentrée comme

indiqué dans la figure 7. Les caractéristiques du câble sont :

- poids propre $g_0 = 10 \text{ kN/m}$,
- module d'élasticité $E = 2.10^8 \text{ kN/m}^2$,
- section $A = 0,012 \text{ m}^2$,
- flèche initiale $f_0 = 5\text{m}$ située à une distance de 75 m.

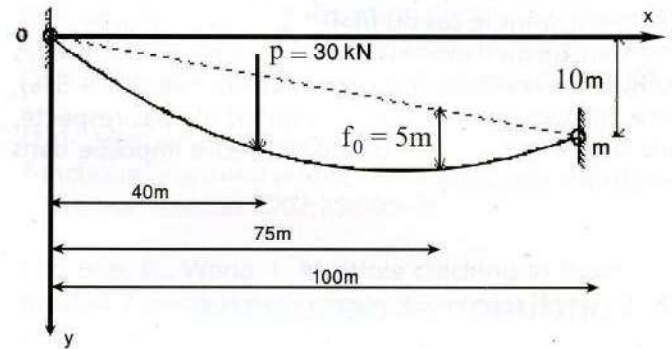


Figure 7 : Charges appliquées sur le câble.

Exemple n° 2 (cas d'appuis fixes avec $f/l > 0.1$)

Pour cet exemple, on reprend les données de l'exemple n°1 avec une nouvelle valeur de flèche : $f_0 = 20 \text{ m}$

Les résultats des exemples sont résumés dans les tableaux 1 et 2 :

Tableau 1 : Validation des résultats de l'exemple n° 1

	Méthode proposée	Méthode classique	Erreur relative (%)
Etat à vide			
H0 (kN)	1890	1875	0,8
L0 (m)	101,664	101,666	0,0
ΔL0 (m)	0,080	0,081	1,2
R0 (kN)	702	688	2,1
Rm (kN)	315	313	0,8
Etat en charge			
H (kN)	1968	1954	0,7
L (m)	101,667	101,670	0,0
ΔL (m)	0,083	0,084	1,2
R0 (kN)	728	713	2,0
Rm (kN)	319	317	0,8

Tableau 2 : Validation des résultats de l'exemple n° 2

	Méthode proposée	Méthode classique	Erreur relative (%)
Etat à vide			
H0 (kN)	512	469	9,2
L0 (m)	117,106	119,181	1,7
ΔL0 (m)	0,025	0,027	7,4
R0 (kN)	652	547	19,2
Rm (kN)	519	453	14,5
Etat en charge			
H (kN)	533	489	9,0
L (m)	117,107	119,182	1,7
ΔL (m)	0,026	0,028	7,1
R0 (kN)	673	567	18,7
Rm (kN)	528	463	14,0

Interprétation

D'après l'exemple (1) (dans le cas où $f/l \leq 0,1$), on constate qu'il existe une très bonne concordance entre les résultats de la méthode proposée et la méthode classique car en aucun cas l'erreur relative n'a dépassé 5% (erreur relative maximale permise).

Par contre, dans le cas où $f/l > 0,1$ (cas de l'exemple n° 2), on remarque qu'il existe une grande différence entre les résultats de ces deux méthodes (erreur relative $> 5\%$). Cette différence est due au fait qu'on n'a pas respecté, dans cet exemple, la condition de flèche imposée dans la méthode classique.

12. Conclusion et perspective

1- Le besoin d'analyser et de maîtriser le comportement statique d'un câble sous l'influence des charges concentrées à moindre coût a incité les chercheurs à développer des méthodes de calcul plus précises et plus adaptées à la déformation exacte du câble. L'approche présentée semble être plus conforme aux besoins précités.

2- Notre étude peut être alors profitable dans le sens où elle permet d'analyser n'importe quel câble sous un chargement vertical que ce soit un câble à petite flèche ou à grande flèche. Autrement dit, le domaine d'application de cette approche est plus large que celui de la théorie classique où elle est limitée par la condition de flèche.

3- L'analyse d'un câble à grande flèche, soumis à un chargement vertical, permet de diminuer d'une façon très significative la tension horizontale. Donc, cet avantage se traduira par un gain économique au niveau du dispositif d'ancrage par rapport à un câble à petite flèche soumis au même chargement.

Références

- [1] Trinh L.T., 'Ca'ch tinh hêtreo so' dô biên dang' (Méthode de calcul des systèmes à câble par le schéma déformable), Hanoi 1985, pp. 15-163.
- [2] Ahmadi-Kashani K. 'The analysis of cables subject to uniformly distributed loads', Eng. Struct., Vol. 10, July 1988, pp. 174-184.
- [3] Kassimali A., Parsi-Feraidoonian H. 'Strength of cable trusses under combined loads', Journal of Structural Engineering, Vol. 133, N° 5, May 1987, pp. 907-924.
- [4] Jennings A. 'Les ponts suspendus', Construction News Magazine, December 1983, pp. 34-35.
- [5] Krishna P., Gupta V.K., Ahuja A.K., 'Mittal A.K. Performance of cable trusses under static loads', Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 108, N° ST1, January 1982, pp. 265-282.

[6] Nishino F., Duggal R., Loganathan S. 'Design analysis of cable networks', Journal of Structural Engineering, Vol. 115, N° 12, December 1989, pp. 3123-3141.

[7] Schlaich J. 'Les structures légères', Annales de l'ITBP N° 479, Série technique générale de la construction 120, Décembre 1989, pp. 12-33.